7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

План:

1. Предел функции одной переменной

2. Вычисление пределов

3. Предел функции многих переменных

4. Непрерывность функции одной переменной

5. Непрерывность функции многих переменных

Ключевые слова и словосочетания

Проколотая δ - окрестность точки, предел функции в точке, частичный предел функции в точке, односторонние конечные пределы, бесконечные пределы в конечной точке, бесконечно большая функция, предел в бесконечности, бесконечно малые функции, критерий существования предела функции, раскрытие неопределенностей, замечательные пределы, важные пределы, двойной предел, повторный предел.

Непрерывность функции одной переменной, точка разрыва первого рода, скачок функции в точке, точка устранимого разрыва, доопределение функции по непрерывности в точке, точка разрыва второго рода, локальные свойства непрерывной функции, ограниченность непрерывной на отрезке функции, достижимость наименьшего и наибольшего значений, промежуточные значения, предел функции многих переменных, непрерывность функции многих переменных, непрерывность сложной функции, свойства функций непрерывных на компакте.

1. Предел функции одной переменной

1.1. Понятие предела. Важную роль в математическом анализе играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки.

Напомним, что δ-окрестностью точки a называется интервал длины 2δ с центром в точке $\boldsymbol{a}$, т. е. множество

$$O_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta\}=\{x:\ a-\delta<x<a+\delta\}.$$

Если из этого интервала удалить точку a, то получим множество, которое называют **проколотой δ-окрестностью точки** $\boldsymbol{a}$ и обозначают $\dot{O}_\delta(a)$**,** т.е.

$$\dot{O}_\delta(a)=\{x:\ |x-a|<\delta,\ \ x\neq a\}=\{x:\ 0<|x-a|<\delta\}.$$

а) Определение предела по Коши

Число b **называется пределом функции** $f(x)$ **в точке** a**,** если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a, и для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta,\ \ x\neq a$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ или $f(x)\to b$ при $x\to a$.

С помощью логических символов это определение можно записать так:

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\quad \forall x:\ \ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon,$$

или, используя понятие окрестности, в виде

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\quad \forall x\in\dot{O}_\delta(a)\Rightarrow f(x)\in O_\varepsilon(b).$$

В случае бесконечного a, т.е. $x\to\infty$ определение таково:

Число b **называется пределом функции** $f(x)$ **при** $x\to\infty$, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $M>0$ такое, что для всех $x>M$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

б) Определение предела по Гейне

Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т.е. $\exists\delta_0>0:\ \dot{O}_{\delta 0}(a)\subset D(f)$ и для любой последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к a и такой, что $x_k\in\dot{O}_{\delta_0}(a)$ для всех $k\in\mathrm{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_k)\}$ сходится к числу b.

Пример 1. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x=0$.

Решение

Достаточно показать, что существуют последовательности $\{x_k\}$ и $\{\tilde{x}_k\}$ с отличными от нуля членами, сходящиеся к нулю и такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)\neq\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k)$.

Возьмем $x_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $\tilde{x}_k = (k\pi)^{-1}$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{x\to\infty} \tilde{x}_k = 0$, $f(x_k) = 1$ и $f(\tilde{x}_k) = 0$ для всех $k \in \mathrm{N}$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = 1$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = 0$. Следовательно, функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$. ▲

Если функция f определена в проколотой δ_0-окрестности точки a и существуют число b и последовательность $\{x_k\}$ такие, что $x_k \in \dot{O}_{\delta_0}(a)$ при всех $k \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$, то число b называют **частичным пределом функции** f **в точке** a.

Пример 2. Для функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ каждое число $b = [-1,\ 1]$ является ее частичным пределом. В самом деле, последовательность $\{x_k\}$, где $x_k = (\arcsin b + 2k\pi)^{-1}$, образованная из корней уравнения $\sin\frac{1}{x} = b$ (рис. 1),

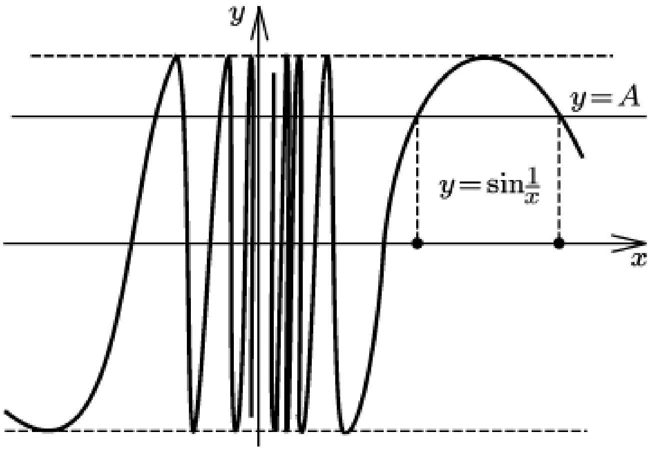

Рис. 1

такова, что $x_k \neq 0$ для всех $k \in \mathrm{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

Замечание. Определение *Гейне* весьма полезно на практике. Например, если существование предела установлено, то для его нахождения достаточно определить предел $f(x)$ для какой-нибудь одной подпоследовательности x_k.

в) Эквивалентность двух определений предела.

Теорема 1. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Упражнение

Доказать, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный. ►

1.2. Различные типы пределов. Различных типов пределов оказывается довольно много. Если их воспринимать как разные понятия и укладывать в голове независимо друг от друга - никакого места не хватит. Есть всего одно понятие предела. Одна идея, одна схема. Остальное - вариации. И эти вариации, желательно, чтобы сами выскакивали из головы по мере надобности. Если «не выскакивают» - лучше еще повозиться с общей идеей. А заглядывать в книжку даже вредно.

Вариации определяются природой переменных: a, b могут быть в том числе бесконечностями; x, f - дискретными или непрерывными величинами.

Ниже в качестве примера из числа различных типов пределов рассмотрим ***односторонние конечные пределы.***

Число b_1 называют **пределом слева функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ или $f(a-0)$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a-\delta,\ a) \Rightarrow \left| f(x) - b_1 \right| < \varepsilon.$$

Аналогично число b_2 называют **пределом справа функции** $f(x)$ в **точке** a и обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ или $f(a+0)$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in (a,\ a+\delta) \Rightarrow \left| f(x) - b_2 \right| < \varepsilon.$$

Числа b_1 и b_2 характеризуют поведение функции f соответственно в левой и правой полуокрестности точки a, поэтому пределы слева и справа называют **односторонними пределами.** Если $a = 0$, то предел слева функции $f(x)$ обозначают $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = b$ или $f(-0)$, а предел справа обозначают $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = b$ или $f(+0)$.

Пример 3. Для функции

$$sign(x)=\begin{cases}-1, & \textit{если} \quad x<0,\\ 0, & \textit{если} \quad x=0,\\ 1, & \textit{если} \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 2,

$$\lim_{x\to -0} f(x)=f(-0)=-1, \qquad \lim_{x\to +0} f(x)=f(+0)=1. \blacktriangle$$

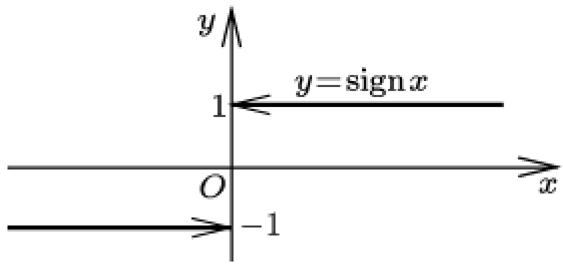

Рис. 2

Отметим еще, что если

$$\forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0: \;\; \forall x\in \dot{O}_\delta(a) \;\; \Rightarrow f(x)\in[b, \;\; b+\varepsilon),$$

т.е. значения функции лежат в правой ε- полуокрестности числа b, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b+0$. В частности, если $b=0$, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+0$.

Аналогично

$$\left\{\lim_{x\to a} f(x)=b-0\right\}\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0: \;\; \forall x\in \dot{O}_\delta(a) \;\; \Rightarrow f(x)\in(b-0, \;\; b]$$

Пример 4. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \textit{если} \quad x<0,\\ 2, & \textit{если} \quad x=0,\\ 1+\sqrt{x}, & \textit{если} \quad x>0,\end{cases}$$

график которой изображен на рис. 3, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1+0. \blacktriangle$

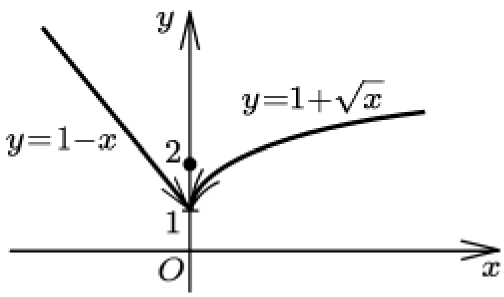

Рис. 3

Аналогичный смысл имеют записи вида

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b+0, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=b-0.$$

Например,

$$\left\{\lim_{x\to a-0} f(x)=b+0\right\} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall x\in(a-\delta,\ a)\Rightarrow f(x)\in\{b,\quad b+\varepsilon).$$

Упражнение

Записать с помощью логических символов утверждение:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b-0. \blacktriangleright$$

Упражнение

Доказать, что функция $f(x)$ имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существуют односторонние пределы функции f и выполняется равенство $f(a-0)=f(a+0)$. ►

1.3. Свойства пределов функций. В рассматриваемых ниже свойствах речь идет о конечном пределе функции в заданной точке. Под точкой понимается либо число a, либо один из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$, ∞. Предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a, не содержащей саму точку a. Для определенности будем формулировать и доказывать свойства пределов, предполагая, что a - число, а функция определена в проколотой окрестности точки a.

а) Локальные свойства функции, имеющей предел. Покажем, что функция, имеющая конечный предел в заданной точке, обладает некоторыми **локальными** свойствами, т. е. свойствами, которые справедливы в окрестности этой точки.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой эта функция ограничена.

Свойство 2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, причем $b\neq 0$, то найдется такая проколотая окрестность точки $\boldsymbol{a}$, в которой значения функции f имеют тот же знак, что и число b.

Это свойство **называют свойством сохранения знака предела.**

Свойство 3. Если $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, причем $c\neq 0$, то существует число $\delta>0$ такое, что функция $\dfrac{1}{g(x)}$ ограничена на множестве $\dot{O}_\delta(a)$.

б) Свойства пределов, связанные с неравенствами

Свойство 1. Если существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\dot{O}_\delta(a)$ выполняются неравенства

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x), \tag{2}$$

и если

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=b, \tag{3}$$

то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Свойство 2. Если существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\dot{O}_\delta(a)$ справедливо неравенство $f(x)\leq g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, то $b\leq c$.

Замечание. Если исходное неравенство является строгим, т.е. $f(x)<g(x)$, то в случае существования пределов функций f и g в точке $\boldsymbol{a}$ можно утверждать только, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq\lim\limits_{x\to a} g(x)$, т. е. знак строгого неравенства между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется.

Упражнение

Доказать, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ причем $b<c$, то существует число $\delta>0$ такое, что для всех $x\in\dot{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $f(x)<g(x)$.▶

в) Бесконечно малые функции. Если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то функцию $\alpha(\boldsymbol{x})$ называют бесконечно малой при $x\to a$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$;

2) произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на ограниченную в некоторой проколотой окрестности точки a функцию есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Эти свойства легко доказать, используя определения бесконечно малой и ограниченной функции, либо с помощью определения предела функции по Гейне и свойств бесконечно малых последовательностей. Из второго свойства следует, что произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Замечание. Из определения предела функции и определения бесконечно малой функции следует, что число b является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(x) = b + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Упражнения

1. Показать, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$. ▶

2. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $\alpha(x) \neq 0$ для всех $x \in \dot{O}_\delta(a)$. Доказать, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$. ▶

г) Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы в точке a, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, то

$$1)\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=b+c,$$

$$2)\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=b\cdot c, \tag{4}$$

$$3)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c} \text{ при условии, что } c\neq 0.$$

Отметим частный случай утверждения (4):

$$\lim_{x\to a}\big(C\cdot f(x)\big)=C\cdot\lim_{x\to a} f(x),$$

т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела.

1.4. Пределы монотонных функций. Понятие монотонной функции было введено в § 17. Приведем теорему о существовании односторонних пределов у монотонной функции.

Теорема 2. Если функция f определена и является монотонной на отрезке $[a,\ \ b]$, то в каждой точке $x_0\in(a,\ \ b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b соответственно правый и левый пределы.

Следствие. Если функция f определена и возрастает на отрезке $[a,\ \ b]$, $x_0\in(a,\ \ b)$, то $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$

Замечание. Теорема о пределе монотонной функции справедлива для любого конечного или бесконечного промежутков. При этом, если f - возрастающая функция, не ограниченная сверху на $(a,\ \ b)$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$ (в случае, когда $a=+\infty$, пишут $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$), а если f - возрастающая и не ограниченная снизу на промежутке $(a,\ \ b)$ функция, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)$

1.5. Критерий Коши существования предела функции. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке $x=a$ **условию Коши,** если она определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0:\quad\forall x',x''\in\dot{O}_\delta(a)\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon \tag{5}$$

Теорема 3. Для того чтобы существовал конечный предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши (5).

Замечание. Теорема 3 остается в силе, если точку a заменить одним из символов $a-0$, $a+0$, $-\infty$, $+\infty$; при этом условие (5) должно выполняться в окрестности этого символа.

2. Вычисление пределов функций

2.1. Раскрытие неопределенностей

При вычислении пределов часто встречается случай, когда требуется найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где f и g - бесконечно малые функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. В этом случае вычисление предела называют **«раскрытием неопределенности»** вида $\dfrac{0}{0}$.

Чтобы найти такой предел, обычно преобразуют дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, выделяя в числителе и знаменателе множитель вида $(x-a)^k$. Например, если в некоторой окрестности точки $x=a$ функции f и g представляются в виде $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, $g(x)=(x-a)^k g_1(x)$, где $k\in\mathrm{N}$, а функции $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{g_1}$ непрерывны (понятие непрерывности рассмотрим в чуть ниже) в точке a, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x\neq a$, откуда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$, если $g_1(a)\neq 0$.

Аналогично, если f и g - бесконечно большие функции при $x\to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, то говорят, что их частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и разность

$f(x)-g(x)$ представляют собой при $x \to a$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty-\infty$ соответственно. Для раскрытия неопределенностей таких типов обычно преобразуют частное или разность так, чтобы к полученной функции были применены свойства пределов. Например, если f и g - многочлены степени m т.е. $f(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $g(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, где $a_k \neq 0$, $b_k \neq 0$, то разделив числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ на x^m найдем, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_m+a_{m-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_0\frac{1}{x^m}}{b_m+b_{m-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_0\frac{1}{x^m}}=\frac{a_m}{b_m}$$

2.2. Замечательные и некоторые важные пределы .

Теорема 11 (первый замечательный предел). Если $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теорема 12 (второй замечательный предел). Функция $\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ имеет при $x \to 0$ предел, равный e $(e=2{,}718...)$, т.е.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Существуют некоторые важные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{shx}{x}=1$, где $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}.$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$ для любого $\alpha \in R^1$, $\alpha \neq 0$.

Доказательство некоторых из них приведем ниже:

2) Пусть $y = \arcsin x$ тогда $x = \sin y$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y},$$

причем $\{x \to 0\} \Leftrightarrow \{y \to 0\}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y}.$$

Используя первый замечательный предел $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$, получаем соотношение 2).

3) Если $y = arctgx$ тогда $x = tgy$ и поэтому

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y},$$

причем $\{\boldsymbol{x} \to 0\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{y} \to 0\}$.

Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{tgy},$$

где

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{tgy} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \cos y = 1,$$

то справедливо утверждение 3).▲

Упражнение

Остальные важные пределы доказать самостоятельно. ►

2.3. Сравнение функций.

а) Эквивалентные функции

Если в некоторой проколотой окрестности* точки x_0 определены функции f, g, h такие, что

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1, \tag{7}$$

---

* В этом подпункте во избежание путаницы проколотую окрестность точки $\boldsymbol{x}_0$ обозначим через $\dot{U}_\delta(x_0)$, т.е. $\dot{U}_\delta(x_0) \equiv \dot{O}_\delta(x_0)$.

то функции f и g называют **эквивалентными (асимптотически равными)** при $x \to x_0$ и пишут

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0,$$

или, короче, $f \sim g$ при $x \to x_0$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\sin x = x \cdot \dfrac{\sin x}{x}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\dfrac{x^4}{x^2+1} \sim x^2$ при $x \to \infty$, так как $\dfrac{x^4}{x^2+1} = x^2 \dfrac{x^2}{x^2+1}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1.$

Упражнения

1. Показать, что отношение эквивалентности функций обладает свойствами:

а) симметричности, т. е. если $\boldsymbol{f \sim g}$ при $\boldsymbol{x \to x_0}$, то $\boldsymbol{g \sim f}$ при $\boldsymbol{x \to x_0}$;

б) транзитивности, т. е. если $f \sim g$ и $g \sim \varphi$ при $x \to x_0$, то $\boldsymbol{f} \sim \varphi$ при $x \to x_0$. ►

2. Показать, что если $f \sim g$ и $f_1 \sim g_1$ при $x \to x_0$, то $ff_1 \sim gg_1$ при $x \to x_0$. ►

Отметим, что функции f и g, не имеющие нулей в проколотой окрестности точки x_0, эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

Понятие эквивалентности обычно используют в тех случаях, когда обе функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$.

Некоторые замечательные и важные пределы, приведенные выше, позволяют составить следующую таблицу функций, эквивалентных при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \qquad \operatorname{sh} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \qquad (1+x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x$$

Эти соотношения остаются в силе при $x \to x_0$, если заменить в них x на функцию $\alpha(x)$ такую, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Например,

$$\sin x^2 \sim x^2 \text{ при } x \to 0,$$

$$\operatorname{sh}(x-1)^3 \sim (x-1)^3 \text{ при } x \to 1.$$

Пример 10. Доказать, что

$$\text{а) } 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \text{ при ; б) } ch\, x - 1 \sim \frac{x^3}{2} \text{ при } x \to 0.$$

Решение

а) Пользуясь тем, что $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ и $\sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$, получаем $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

б) Так как $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $ch\, x - 1 = 2\, sh^2 \frac{x}{2}$ и $sh \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$ при $x \to 0$, то $ch\, x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$. ▲

б) Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

Теорема 13. Если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$ при $x \to x_0$, то из существования предела функции $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ при $x \to x_0$ следует существование предела функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и справедливость равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x \cdot (e^x - 1)}{\cos x - \cos 3x}$.

Решение

Так как $\arcsin x \sim x$, $e^x - 1 \sim \boldsymbol{x}$, $\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$, $\sin x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$, то $\arcsin x \cdot \left(e^x - 1\right) \sim x^2$, $\cos x - \cos 3x \sim 4x^2$ при $x \to 0$. Отсюда по теореме 5 следует, что искомый предел равен 1/4.▲

В заключении отметим, что в дальнейшем будут рассмотрены более эффективные методы вычисления пределов, основанные на использовании понятия производной.

3. Предел функции многих переменных

3.1. Предел функции многих переменных в точке.

Пусть функция $f(X)$ в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta(A)$ точки A пространства R^n. Говорят, что число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что $\forall X \in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $\left|f(X) - b\right| < \varepsilon$.

Говорят, что функция $f(X)$, определенная в $\dot{O}_\delta(A)$, имеет при $X \to A$ предел b, если для любой последовательности $X_k \in \dot{O}_\delta(A)$ и такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A$ выполнено равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(X_k) = b$.

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функций одной переменной.

Если число b есть предел функции $f(X)$ при $X \to A$, то будем писать $b = \lim\limits_{X\to A} f(X)$.

Если функция двух переменных $f(x_1, x_2)$ определена в $\dot{O}_\delta(A(a_1, a_2))$, а число b есть ее предел при $(x_1, x_2) \to (a_1, a_2)$, то пишут

$$b = \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2}} f(x_1, x_2)$$

и называют **иногда число b двойным пределом.**

Аналогично для функции n переменных наряду с обозначением $b=\lim\limits_{X\to A} f(X)$ будем использовать обозначение

$$b=\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Лемма 1. Пусть функции $f(X)$ и $\varphi(X)$ определены в $\dot{O}_\delta(A)$ и $|f(X)|\le\varphi(X)$ в $\dot{O}_\delta(A)$. Если $\lim\limits_{X\to A}\varphi(X)=0$, то и $\lim\limits_{X\to A} f(X)=0$.

Примеры

12. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^d=0$, если $d>0$.

Решение

Возьмем любое $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2d}}$. Пусть $(x,y)\in O_\delta(0{,}0)$, тогда

$$(x^2+y^2)^d<\delta^{2d}<\varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^d=0.\ \blacktriangle$$

13. Показать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}=0$, если $\alpha+\beta-2\gamma>0$.

Решение

Так как

$$|x|<\sqrt{x^2+y^2},\quad |y|<\sqrt{x^2+y^2},$$

то при $x^2+y^2>0$ имеем неравенства

$$0\le f(x,y)=\frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}\le\frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{(x^2+y^2)^\gamma}=(x^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2}}=\varphi(x,y).$$

В силу примера 12 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x,y)=0$, так как $\alpha+\beta-2\gamma>0$. Применяя лемму 1, получаем, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.\ \blacktriangle$$

14. Функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Рассмотрим последовательность точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,...$. Тогда $f(x_k,y_k)=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=1$. Если же взять последовательность точек $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ -\dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,...$ то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k,y'_k)=-1$. Так как при любом $k\in\mathrm{N}$ точки (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) не совпадают с точкой $(0,0)$, а последовательности точек (x_k,y_k) и (x'_k,y'_k) сходятся к точке $(0,0)$, то, используя второе определение предела, получаем, что функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$. ▲

15. Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$.

Решение

Повторяя рассуждения примера 3, построим две последовательности точек $X_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$, $k=1,2,...$ и $X'_k\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k^2}\right)$, $k=1,2,....$. Так как $(x_k,y_k)\to(0,0)$ и $(x'_k,y'_k)\to(0,0)$, а $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_k,y'_k)=1$, то двойной предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ при $(x,y)\to(0,0)$ не существует. ▲

Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности $\dot{O}_\delta((x_0,y_0))$. Пределом функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) **по направлению** $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ будем называть выражение

$$\lim_{t\to+0} f(x_0+t\cos\alpha,\quad y_0+t\sin\alpha)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\dot{O}_\delta(x_0,y_0)\cap L}} f(x,y)$$

где L есть луч, выходящий из точки (x_0,y_0) в направлении l.

16. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ в точке (0,0) по любому направлению $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен $\sin 2\alpha$.

Решение

Так как при $t>0$ выполнено равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha,$$

то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha. \blacktriangle$$

17. Показать, что предел функции $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ в точке (0,0) по любому направлению $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ существует и равен нулю.

Решение

При $t>0$ справедливо равенство

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{2t\sin\alpha\cos^2\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}.$$

Если $\sin\alpha=0$, то $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$. Если $\sin\alpha\neq 0$, то

$$\lim_{t\to+0} f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0 \blacktriangle$$

Ясно, что из существования $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}} f(X)$ следует существование $\lim\limits_{X\to A,\ X\in \mathrm{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathrm{M}'\subset \mathrm{M}$, для которого A есть предельная точка. В частности, из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ следует существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$.

Из результатов примеров 15 и 17 следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0,y_0) не вытекает существование в этой точке предела функции.

Предел функции $f(X)$ в точке $X_0 \in R^n$ по направлению $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$, где $\boldsymbol{l}_1^2 + \boldsymbol{l}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{l}_{\boldsymbol{n}}^2 = 1$, определяется по аналогии со случаем функции двух переменных.

Упражнение

Пусть выполнены следующие условия:

а) множества $\mathrm{M}_i \subset R^n$, $i-1,2,...,N$;

б) X_0 есть предельная точка каждого из множеств M_i, $i-1,2,...,N$;

в) функция $f(X)$ определена на множестве $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_i$.

Доказать, что $b = \lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathrm{M}} f(X)$ в том и только в том случае, когда $b = \lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathrm{M}_i} f(X)$, $i = 1,2,...,N$ ▶

Упражнение

Показать, что результат упражнения 1 не допускает обобщения на тот случай, когда множество М есть объединение бесконечного множества множеств $\bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{M}_\alpha$. ▶

Указание. Проанализируйте еще раз результат примеров 15 и 17.

3.3. Повторные пределы

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена на множестве

$$\Pi = \{(x, y): \quad 0 < |x - x_0| < a, \quad 0 < |y - y_0| < b\}.$$

Допустим, что $\forall x \in (x_0 - a,\ x_0 + a)$, $x \neq x_0$, существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = g(x)$, а функция $g(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0. Если существует

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y),$$

то этот предел называется **повторным.**

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

Как показывают простые примеры, из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

Примеры

18. Для функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ примера 14 двойной предел при $(x,y)\to(0,0)$ не существует, но оба повторных предела равны нулю, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=0.\ \blacktriangle$$

19. Для функции

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{\textit{если}} \quad y\neq 0,\\ 0, & \text{\textit{если}} \quad y=0\end{cases}$$

справедливо неравенство $|f(x,y)|\le|x|$. В силу леммы 1 двойной предел этой функции при $(x,y)\to(0,0)$ равен нулю. Но при $x\neq 0$ не существует

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$$

а поэтому не существует и соответствующий повторный предел. ▲

Упражнение

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки (x_0,y_0) и существует двойной предел функции $f(x,y)$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Доказать, что в том случае, когда в проколотой окрестности точки y_0 определена функция $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, будет существовать и повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, причем он равен двойному пределу.►

Бесконечные пределы для функций многих переменных определяются по той же схеме, что и для функций одной переменной. Например, $\lim\limits_{X\to A} f(X) = +\infty$, если для любого действительного числа C найдется такое действительное число $\delta > 0$ такое, что $\forall X \in \dot{O}_\delta(A)$ выполнено неравенство $f(X) > C$.

Пример 20. Показать, что

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = 0$$

Решение

Так как при $\boldsymbol{x} > 0, \quad \boldsymbol{y} > 0$ справедливо неравенство

$$0 \le (x^2+y^2)e^{-(x+y)} \le (x+y)^2 e^{-(x+y)}$$

и $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t} = 0$, то $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0$ такое, что $\forall t > \delta$ выполнено неравенство $t^2e^{-t} < \varepsilon$. Но тогда $\forall x > \dfrac{\delta}{2}$ и $\forall y > \dfrac{\delta}{2}$ справедливо неравенство

$$0 \le (x^2+y^2)e^{-(x+y)} < \varepsilon . \blacktriangle$$

4. Непрерывность функции одной переменной

4.1. Понятие непрерывности функции.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a называется **непрерывной в точке** a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{8}$$

Таким образом, функция f непрерывна в точке a, если выполнены следующие условия:

а) функция f определена в некоторой окрестности точки a, т.е. существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $O_{\delta_0}(a) \subset D(f)$;

б) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

в) $b = f(a)$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке a, выраженное условием (8), можно сформулировать с помощью неравенств (на языке $\varepsilon - \delta$), с помощью окрестностей и в терминах последовательностей соответственно в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x: \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x \in O_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(a)),$$

$$\forall \{x_k\}: \ \lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки a, и пределом функции является значение этой функции в точке a.

Назовем разность $x - a$ **приращением аргумента** и обозначим Δx, а разность $f(x) - f(a)$ - приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента Δx, и обозначим Δy. Таким образом,

$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

При этих обозначениях равенство (1) примет вид

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 21. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если:

$$a) \quad f(x) = x^3, \ a = 1; \qquad b) \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \ a \neq 0;$$

$$c) \quad f(x) = \sqrt{x}, \ a > 0; \qquad d) \quad f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \qquad a = 0.$$

Решение

a) Если $\boldsymbol{x} \to 1$, то по свойствам пределов получаем $\boldsymbol{x}^3 \to 1$, т. е. для функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$ в точке $\boldsymbol{x} = 1$ выполняется условие (8). Поэтому функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^3$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x} = 1$.

b) Если $x \to a$, где $a \neq 0$, то, используя свойства пределов, получаем

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{x^2} \to \frac{1}{a^2},$$

т.е. функция $f(x) = \dfrac{1}{a^2}$ непрерывна в точке $x = a$ $(a \neq 0)$.

c) Так как

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}},$$

то отсюда при $x > 0$ получаем

$$0 \leq \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

Следовательно, $\sqrt{x} - \sqrt{a} \to 0$ при $x \to a$, если $a > 0$. Это означает, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна в точке a, где $a > 0$.

d) Функция f определена на R^1 и при любом $x \in R^1$ выполняется неравенство

$$0 \leq |f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|,$$

так как $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$ при $x \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, т. е. функция f непрерывна в точке $x = 0$. ▲

По аналогии с понятием предела слева (справа) вводится понятие непрерывности слева (справа). Если функция f определена на полуинтервале $(a-\delta,\ a]$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)$, т.е. $f(a-0) = f(a)$, то эту функцию называют **непрерывной слева в точке a.**

Аналогично, если функция f определена на полуинтервале $[a,\ a+\delta)$ и $f(a+0) = f(a)$, то эту функцию называют **непрерывной справа в точке a.**

Пример 22. Функция $y = E(x)$, где $E(x) = [x]$ - целая часть числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x) непрерывна справа в точке $x = 1$ и не является непрерывной слева в этой точке (рис. 4), так как $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = f(1) = 1$. Стрелка на графике указывает на то, что точка в ее острие не принадлежит графику.

Очевидно, функция непрерывна в данной точке тогда и только тогда, когда она непрерывна как справа, так и слева в этой точке.▲

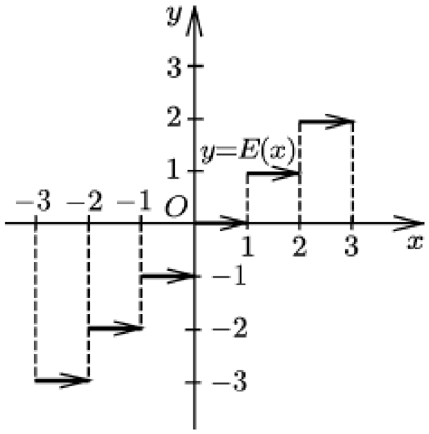

Рис.4

4.2. Точки разрыва. В этом пункте будем предполагать, что функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Точку a **назовем точкой разрыва функции** f**,** если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a.

Следовательно, a - точка разрыва функции f, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $a \in D(f)$;

б) существует конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

в) $b = f(a)$.

Если a - точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$, то **точку** a **называют точкой разрыва первого рода.**

Замечание. Если $x = a$ - точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то разность $f(a+0) - f(a-0)$ называют **скачком функции в точке** a. В случае, когда $f(a+0) = f(a-0)$, точку a называют **точкой устранимого разрыва.** Полагая $f(a) = f(a+0) = f(a-0) = b$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \neq a, \\ b, & \text{если} \quad x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что **функция доопределена по непрерывности в точке** a**.**

Пусть $x = a$ - точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют **точкой разрыва второго рода функции** f**.**

В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Пример 23. Для функции $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ точка $x = 0$ - точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.▲

Для функций $\sin\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ точка $x = 0$ - точка разрыва второго рода (рис. 1 и 4).

Теорема 14. Если функция f определена на отрезке $[a,b]$ и монотонна, то она может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.

4.3. Свойства функций, непрерывных в точке.

а) Локальные свойства непрерывной функции.

Свойство 1. Если функция f непрерывна в точке $\boldsymbol{a}$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т.е.

$$\exists\delta>0\quad\exists C>0:\quad\forall x\in O_\delta(a)\ \Rightarrow\ |f(x)|\le C.$$

Свойство 2. Если функция f непрерывна в точке a, причем $f(a)\neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$, т.е. $\exists\delta>0:\ \forall x\in O_\delta(a)\ \Rightarrow\ sign f(x)=sign f(a)$.

б) Непрерывность суммы, произведения и частного.

Если функции f и g непрерывны в точке a, то функции $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ (при условии $g(a)\neq 0$) непрерывны в точке a.

в) Непрерывность сложной функции.

Теорема 15. Если функция $z=f(y)$ непрерывна в точке y_0, функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причем $y_0=\varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $f(\varphi(x))$ и эта функция непрерывна в точке x_0.

Упражнение

Сформулировать определение непрерывности с помощью последовательностей (по Гейне) и доказать, исходя из этого определения, теорему 15.▲

4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функцию $f(x)$ называют непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b) и, кроме того, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

а) Ограниченность непрерывной на отрезке функции.

Теорема 16 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена, т. е.

$$\exists C>0:\quad\forall x\in[a,b])\ \Rightarrow\ |f(x)|\le C.$$

Замечание. Теорема 15 неверна для промежутков, не являющихся отрезками.

Примеры

24. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0,\ 1)$, но не ограничена на этом интервале. ▲

25. Функция $f(x)=x^2$ непрерывна на R^1, но не ограничена на R^1.▲

б) Достижимость наименьшего и наибольшего значений

Теорема 17 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает своего m наименьшего значения и M наибольшего значения.

Замечание. Теорема 16 неверна для интервалов.

в) Промежуточные значения.

Теорема 18 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает в его концах значения разных знаков, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$, то на отрезке $[a,b]$ имеется хотя бы один нуль функции f, т. е.

$$\exists c\in[a,b]:\quad f(c)=0.$$

Замечание. Теорема 17 утверждает, что график функции $y=f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимающей в его концах значения разных знаков, пересекает ось Ox (рис. 5) хотя бы в одной точке отрезка $[a,b]$.

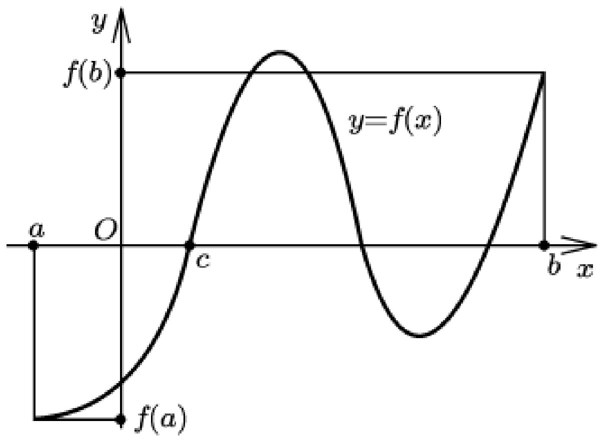

Рис. 5

Теорема 19 (теорема Коши о промежуточных значениях). Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения $\boldsymbol{c}$, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = c$.

Из приведенной теоремы и теоремы 6 вытекает такое утверждение.

Следствие. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, а m и M ее наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке, то областью значений функции является отрезок $[m, M]$.

г) Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции. Понятие обратной функции было введено в предедуших лекциях. Докажем теорему о существовании и непрерывности обратной функции.

Теорема 20. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает на отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена функция $x = g(y)$, обратная к f, непрерывная и строго возрастающая.

Доказательство. Существование и монотонность обратной функции $x = g(y)$ следует из теорем 15 и 16.

Непрерывность обратной функции доказывается с привлечением теоремы о пределах монотонной функции. ■

Замечание. Если функция f непрерывна и строго убывает на отрезке $[a,b]$, то обратная к ней функция g непрерывна и строго убывает на отрезке $[f(a), f(b)]$.

Замечание. Аналогично формулируется и доказывается теорема о функции g, обратной к функции f для случаев, когда функция f задана на интервале (конечном либо бесконечном) и полуинтервале.

Если функция f определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (a,b), то обратная функция g определена, строго возрастает и непрерывна на интервале (r,s), где

$$r = \lim_{x\to a+0} f(x), \qquad s = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

4.5. Непрерывность элементарных функций.

а) Многочлены и рациональные функции. Рассмотрим многочлен степени k, т.е. функцию вида

$$P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Эта функция непрерывна на R^1.

Действительно, функция $y = c$, где $\boldsymbol{c}$ - постоянная, непрерывна на R^1, так как $\Delta y = 0$ при любом $\boldsymbol{x}$. Функция $y = x$ непрерывна на R^1, так как $\Delta y = \Delta x \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому функция $y = a_i x^i$, где $i \in \mathrm{N}$, непрерывна на R^1 как произведение непрерывных функций. Так как многочлен $P_k(x)$ есть сумма непрерывных функций вида $y = a_i x^i$, $\quad (i = 1,2,...,k)$, то он непрерывен на R^1.

Рациональная функция, т.е. функция вида $f(x) = \dfrac{P_k(x)}{Q_l(x)}$, где $P_k(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены степени k и l соответственно, непрерывна во всех точках, которые не являются нулями многочлена $Q_l(x)$.

В самом деле, если $Q_l(x_0) \neq 0$, то из непрерывности многочленов P_k, Q_l следует непрерывность функции f в точке x_0.■

б) Можно доказать, что не только многочлены и рациональные функции, но и *все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения.*

Ниже будет доказано, что

функция $f(x) = \sin x$ непрерывна при любом $x \in R^1$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in R^1$ и приращение Δx. Найдем, что $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$, откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = 0. \blacksquare$$

Аналогично доказываются непрерывность других элементарных функций.

5. Непрерывность функции многих переменных

5.1. Непрерывность функции в точке

Говорят, что функция $f(X)$, определенная в окрестности точки A пространства R^n, **непрерывна в точке** $\boldsymbol{A}$, если $\lim\limits_{X\to A} f(X) = f(A)$.

Говорят, что функция $f(X)$, определенная в окрестности точки $A \in R^n$, **непрерывна в точке** A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $O_\delta(A)$, что для любого $X \in O_\delta(A)$ выполняется неравенство $|f(X) - f(A)| < \varepsilon$.

Эквивалентность двух определений следует из определения предела на языке окрестностей.

Пример 26. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & \textit{если} \quad x^2+y^2>0, \\ 0, & \textit{если} \quad x=y=0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по любому лучу, но не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Решение

Из результата примера 15 следует, что функция $f(x,y)$ не имеет предела при $(x,y)\to(0,0)$ и, следовательно, не является непрерывной в точке $(0,0)$. Из результата примера 17 следует, что в точке $(0,0)$ предел функции $f(x,y)$ по любому направлению существует и равен нулю. Следовательно, функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$ по любому направлению. ▲

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной. Ниже будет без доказательства приведено теорема, что суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

5. 2. Непрерывность сложной функции.

Теорема 21. Пусть функции $\varphi_1(X),\ldots,\varphi_n(X)$ определены в некоторой окрестности точки $X_0 \in R^m$ и непрерывны в точке X_0. Функция $f(Y) = f(y_1,\ldots,y_n)$ определена в окрестности точки $Y_0 = (\varphi_1(X_0),\ldots,\varphi_n(X_0))$ и непрерывна в точке Y_0. Тогда в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{X}_0$ определена сложная функция

$$\Phi(X) = f(\varphi_1(X),\ldots,\varphi_n(X)),$$

причем функция $\Phi(X)$ непрерывна в точке X_0.

5. 3. Свойства функций, непрерывных на компакте.

Функция $f(X)$ называется непрерывной на множестве M, если она непрерывна в каждой точке множества M по этому множеству, т.е. если в каждой предельной точке множества X_0 выполнено условие

$$\lim_{X \to X_0,\ X \in \mathrm{M}} f(X) = f(A).$$

Доказательства следующих двух теорем о свойствах функций, непрерывных на компакте пространства R^n, практически не отличаются от соответствующих доказательств для функций одной переменной, непрерывных на отрезке.

Теорема 22 (Вейерштрасса). Функция $f(X)$, непрерывная на компакте пространства R^n, ограничена на этом компакте.

Теорема 23 (Вейерштрасса). Функция $f(X)$, непрерывная на компакте пространства R^n, принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется проколотой δ - окрестность точки a?

2. Дайте предела по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела – сформулируйте теорему и докажите ее.

3. Что называется частичным пределом функции в точке? Приведите пример функции, который не имеет предела, но имеет частичные пределы.

4. Когда число b называется пределом по Коши функции $f(x)$ в точке a по множеству В и как его обозначают?

5. Что называется пределом слева (справа) функции в точке? Что называется односторонними пределами? Приведите примеры.

6. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существование предела связанное с существованием односторонних пределов функции.

7. Приведите локальные свойства функции, имеющий предел. Что называют свойством сохранения знака предела?

8. Приведите свойства пределов, связанные с неравенствами.

9. Какую функцию называют бесконечно малой? Какими свойствами обладают бесконечно малые функции?

10. Приведите свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.

11. Сформулируйте теорему о существование односторонних пределов у монотонной функции. Приведите следствие и этой теоремы.

12. Когда говорят, что функция удовлетворяет в точке условию Коши?

13. Приведите критерий Коши существования предела функции.

14. В каком случае вычисление предела называют «раскрытием неопределенности» вида $\frac{0}{0}$? Что делают в этом случае для раскрытия неопределенности?

15. В каком случае говорят, что их частное и разность двух функций представляют собой неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ и $\infty - \infty$ соответственно? Что делают обычно для раскрытия неопределенностей таких типов?

16. Когда две функции называют эквивалентными (асимптотически равными)? Как это обозначается?

17. Какими свойствами обладает отношение эквивалентности функций?

18. Приведите необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций?

19. В каких случаях обычно используют понятие эквивалентности?

20. Как производится замена функций эквивалентными функциями при вычислении пределов? Сформулируйте теорему.

21. Дайте предела функции многих переменных по Коши и по Гейне. Разъясните эквивалентность двух определений предела.

22. Что называют двойным пределом?

23. Что называется пределом функции в точке по направлению?

24. Из существования $\lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathrm{M}} f(X)$ следует ли существование $\lim\limits_{X \to A,\ X \in \mathrm{M}'} f(X)$ для любого подмножества $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$, для которого A есть предельная точка?

25. Следует ли из существования двойного предела функции $f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ существование предела функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x, y)$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$?

26. Вытекает ли из существования и равенства пределов по любому направлению в точке (x_0, y_0) существование в этой точке предела функции?

27. Что называют повторным пределом?

28. Приведите простые примеры, которые показывают, что из существования двойного предела не следует существование повторных пределов, а из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела.

29. Приведите критерий Коши существования предела функции.

30. Когда функция называется непрерывной в точке? Какая (полная или проколотая) окрестность точки рассматривается в определении непрерывности?

31. Что означает непрерывность функции в точке в терминах приращение аргумента и приращение функции?

32. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке с помощью последовательностей (по Гейне)?

33. Когда функцию называют непрерывной слева (справа) в точке? Приведите примеры.

34. Сформулируйте необходимое и достаточное условие непрерывности точки.

35. Что называется точкой разрыва функции?

36. Какую точку называют точкой разрыва первого рода? Что называют скачком функции в точке?

37. В каком случае точку называют точкой устранимого разрыва? Когда говорят, что функция доопределена по непрерывности в точке?

38. Какую точку называют точкой разрыва второго рода?

39. Когда функция может иметь точки разрыва только первого порядка? Приведите теорему.

40. Приведите локальные свойства непрерывной функции? Откуда следуют эти свойства?

41. Приведите свойства непрерывности функций связанные арифметическими операциями.

42. Что можно сказать о непрерывности в точке сложной функции? Приведите теорему.

43. Когда функция называется непрерывной на отрезке? Приведите свойства функций непрерывных на отрезках (теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции и достижимости наименьшего и наибольшего значений).

44. Приведите и прокомментируйте теорему о нулях непрерывной функции.

45. Приведите и прокомментируйте теорему Коши о нулях непрерывной функции.

46. Приведите и прокомментируйте теорему Коши о промежуточных значениях. Приведите следствие из этой теоремы, связанное с областью значений функции.

47. Приведите теорему о существования и непрерывности функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции.

48. Покажите непрерывность некоторых элементарных функций.

49. Дайте определение непрерывность функции многих переменных в точке.

50. Дайте определение непрерывность функции (многих переменных) в точке по множеству.

51. Имеют ли место основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций одной переменной для функции многих переменных?

52. Когда функция (многих переменных) называется непрерывной на множестве? Приведите свойства функций непрерывных на компакте (теоремы Вейерштрасса об ограниченности функции и достижимости наименьшего и наибольшего значений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(67 – 106; 114 - 143)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II**. Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., переработ. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.